научный журнал (scientific journal) №12 2017 г.
http://www.bulletennauki.com

УДК 519.64: 519.65

ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПАКЕТА К РЕШЕНИЮ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

THE USE OF MATHEMATICAL SOFTWARE PACKAGE FOR SOLVING INTEGRAL EQUATIONS

©Шувалова Л. Е.
Казанский национальный исследовательский технологический университет
г. Нижнекамск, Россия, leshyvalova@yandex.ru
©Shuvalova L.
Kazan National Research Technological University
Nizhnekamsk, Russia, leshyvalovayjandex.ru
©Валиуллин А. В.
Казанский национальный исследовательский технологический университет
г. Нижнекамск, Россия, aidarval111@mail.ru
©Valiullin A.
Kazan National Research Technological University
Nizhnekamsk, Russia, aidarval111@mail.ru

Аннотация. Рассмотрен метод механических квадратур решения интегральных уравнений с численной реализацией в математическом пакете MathCad. Построены интерполяционные многочлены, аппроксимирующие искомую функцию. Авторами предлагается программа, которая позволяет автоматически находить приближенные решения интегральных уравнений и при других исходных данных. Расчеты. выполненные в программе дают возможность минимизировать погрешность путем специального выбора узлов сетки.

Abstract. The method of mechanical quadratures for solving integral equations with numerical realization of mathematical package MathCad. Constructed interpolation polynomial approximating the desired function. The authors propose a program that allows you to automatically find approximate solutions of integral equations and other basic data. Calculations, made in the program make it possible to minimize the error by a special selection of mesh nodes.

Ключевые слова: интегральное уравнение, квадратурная формула, математический пакет.

Keywords: integral equation, quadrature formula, mathematical package.

Теория интегральных уравнений Фредгольма II рода хорошо разработана [1]. Как известно, точное аналитическое решение для таких классов задач можно найти лишь в частных случаях. В работе Л. Е. Шуваловой и Л. А. Апайчевой (2013) рассмотрен метод механических квадратур для решения нелинейных сингулярных интегральных уравнений, но каждый раз приходится сталкиваться с трудной реализацией вычислительного процесса. Поэтому в данной статье сделана попытка выполнить расчеты в математическом пакете MathCad, который позволяет эффективно решать технические задачи.

В общем случае интегральное уравнение Фредгольма II рода представляется в виде

$$y(x) - p\int_a^b K(x,s) * y(s)\,ds = f(x)\,, \tag{1}$$

где $K(x,s)$, $f(x)$ — известные непрерывные функции в своих областях определения, p — параметр уравнения, а $y(x)$ — искомая функция.

Приближенное решение уравнения (1) ищется методом механических квадратур. Для этого на отрезке $[a,b]$ выбираются узлы:$a \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n = b$.

Уравнение (1) записывается в узлах сетки:

$$y(x_i) - \lambda\int_a^b K(x_i,s) * y(s)\,ds = f(x_i)\,, \quad i = \overline{1,n}. \tag{2}$$

Интегралы в равенстве (2) вычисляются приближенно по квадратурным формулам трапеций и Симпсона:

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx \approx \sum_{j=1}^n A_j * \varphi(x_j)\,. \tag{3}$$

Получаем систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$y_i - \lambda\sum_{j=1}^n A_j * K_{ij} * y_j = f_i\,,\ i = \overline{1,n}\ . \tag{4}$$

Решение СЛАУ (4) дает значения $y_i, i = \overline{1,n},$ по которым путем интерполяции находится приближенное решение интегрального уравнения (1).

С помощью математического пакета Mathcad решается следующий тестовый пример

$$y(x) - \frac{1}{2}\int_0^1 (x + 2s) * y(s)\,ds = e^x + \frac{x - xe - 2}{2}\,.$$

Выбираются узлы сетки и вычисляются в них значения правой части

$f(x) = e^x + \frac{x - ex - 2}{2}$ и ядра $K(x,s) = x + 2s$.

Приведем часть программы:

$$a := 0 \qquad b := 1 \qquad n := 3 \qquad h := \frac{b-a}{n-1}$$

$$x_i := a + h\cdot(i-1) \qquad f_i := e^{x_i} + \frac{x_i - e\cdot x_i - 2}{2} \qquad K_{i,j} := x_i + 2x_j$$

$$x_i = \begin{array}{|r|}\hline 0 \\ \hline 0.5 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \qquad f_i = \begin{array}{|r|}\hline 0 \\ \hline 0.219 \\ \hline 0.859 \\ \hline \end{array} \qquad K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.5 & 1.5 & 2.5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Коэффициенты квадратурой формулы (3) A_i вычисляются либо по формулам трапеции, либо по формулам Симпсона. Имеем

$$A := \left| \begin{array}{l} A_1 \leftarrow \frac{h}{2} \\ A_n \leftarrow \frac{h}{2} \\ \text{for } i \in 2,3..(n-1) \\ \quad A_i \leftarrow h \\ A \end{array} \right. \qquad A = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.5 \\ 0.25 \end{pmatrix}$$

$$A := \left| \begin{array}{l} A_1 \leftarrow \frac{h}{3} \quad \text{< Нахождение коэффициентов} \\ A_n \leftarrow \frac{h}{3} \\ A_n \ \text{ if } n \le 3 \\ \text{for } m \in 3,5..(n-1) \ \text{ otherwise} \\ \quad A_m \leftarrow \frac{4\cdot h}{3} \\ A_n \ \text{ if } n \le 2 \\ \text{for } m \in 2,4..(n-1) \ \text{ otherwise} \\ \quad A_m \leftarrow \frac{2\cdot h}{3} \\ A \end{array} \right. \qquad A = \begin{pmatrix} 0.167 \\ 0.333 \\ 0.167 \end{pmatrix}$$

Далее формируются матрицы C и D, состоящие из коэффициентов СЛАУ (4) и значений правой части в выбранных узлах $f(x_i)$:

$\boxed{P := \frac{-1}{2}}$ < ПАРАМЕТР

$$C := \left| \begin{array}{l} \text{for } j \in 1..n \\ \quad \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..n \\ \quad \left| \begin{array}{l} L_{i,j} \leftarrow A_j \cdot K_{i,j} \\ E_{i,j} \leftarrow 1 + P \cdot L_{i,j} \ \text{ if } i = j \\ E_{i,j} \leftarrow P \cdot L_{i,j} \ \text{ otherwise} \end{array} \right. \\ E \end{array} \right. \end{array} \right. \qquad D := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..n \\ \quad u_i \leftarrow f_i \\ u \end{array} \right. \qquad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.109 \\ 0.375 \\ 0.859 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -0.074 & -0.296 & -0.111 \\ -0.019 & 0.889 & -0.37 & -0.13 \\ -0.037 & -0.148 & 0.556 & -0.148 \\ -0.056 & -0.185 & -0.519 & 0.833 \end{pmatrix} \qquad y := C^{-1} \cdot D$$

В результате работы данного блока программы получаем приближенные значения искомой функции в узлах x_i с применениями формул Симпсона и трапеций соответственно:

$$y = \begin{pmatrix} 0.858 \\ 1.198 \\ 1.694 \\ 2.408 \end{pmatrix}; \quad y = \begin{pmatrix} 1.168 \\ 1.605 \\ 2.198 \\ 3.009 \end{pmatrix}.$$

Для анализа полученных численных результатов применяем интерполяцию с помощью многочлена Лагранжа и кубического сплайна.

$$flg(z) := \sum_i \left[y_i \cdot \left(\prod_j \text{if}\left(i = j, 1, \frac{z - x_j}{x_i - x_j} \right) \right) \right]$$

$$S := \text{cspline}(x, y) \qquad fs(z) := \text{interp}(S, x, y, z)$$

Полученные приближенные решения отразим на графике, сравнив их с точным решением.

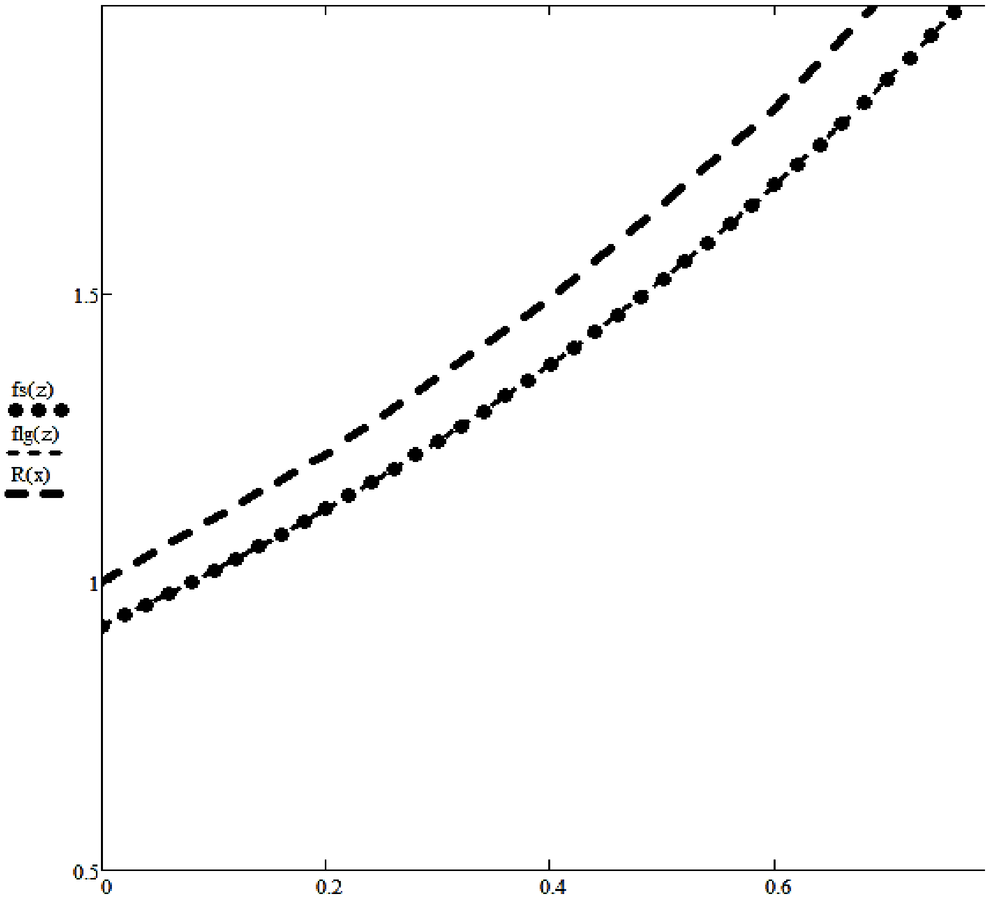

Рисунок. Полученные приближенные и точные решения

Данная программа позволяет автоматически находить приближенные решения интегральных уравнений и при других исходных данных. Кроме того, дает возможность минимизировать погрешность путем специального выбора узлов сетки.

Список литературы:

1. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Киев: Наукова Думка, 1986. 543 с.

2. Шувалова Л. Е., Апайчева Л. А. Приближенное решение одного класса нелинейных сингулярных интегральных уравнений // Вестник Казанского технологического университета. 2013. Т. 16. №12. С. 289-292.

Reference:

1. Verlan, A. F., & Sizikov V. S. (1986). Integral equations: methods, algorithms, programs. Kiev, Naukova Dumka, 543. (in Russian)

2. Shuvalova, L. E., & Apaicheva L. A. (2013). The approximate solution of a class of nonlinear singular integral equations. *Vestnik Kazanskogo technologichescogo Universiteta,* 16, (12), 289-292. (in Russian)

Работа поступила
в редакцию 22.11.2017 г.

Принята к публикации
26.11.2017 г.

Ссылка для цитирования:

Шувалова Л. Е., Валиуллин А. В. Применение математического пакета к решению интегральных уравнений // Бюллетень науки и практики. Электрон. журн. 2017. №12 (25). С. 13-18. Режим доступа: http://www.bulletennauki.com/shuvalova (дата обращения 15.12.2017).

Cite as (APA):

Shuvalova, L., & Valiullin, A. (2017). The use of mathematical software package for solving integral equations. *Bulletin of Science and Practice,* (12), 13-18